IDEALER OG RETNINGSLINJER NÅR MAN SKRIVER MATEMATISKE ARTIKLER

GUNNAR FLØYSTAD

> "Når man skriver klargjør man sine tanker og styrker sin overbevisning. Faktisk så griper man sannsynligvis sine tanker for første gang. Skriving er en måte å tenke på. Skriving skaper tanker, og fremmer evnen til å tenke: du oppdager tanker du knapt visste du hadde, og når til erkjennelse om hva du vet. Du lærer mens du skriver."
>
> -Sheridan Baker, *The practical stylist (1985)*

Det mest fundamentale man må ha klart for seg er at det egentlig ikke er noe spesielt ved å skrive matematiske artikler i forhold til det å skrive artikler i andre fag, i forhold til det å skrive avisartikler, eller i forhold til det å skrive litteratur. Vi skriver i prinsippet i alle tilfellene norsk stil, eller engelsk essay slik vi gjorde det på skolen. Alle de samme reglene for god språkføring, flytende framstilling og grammatikk gjelder. Og som matematikere bør vi vite å verdsette at der er slike universelle standarder, selv om stilskriving kanskje ikke var vår favorittbeskjeftigelse da vi gikk på skolen.

Et ideal når vi skriver og andre leser en matematisk artikkel, eller vi skriver og andre leser noe som helst, er at det skal være like lett og flytende som å lese en roman. Det er unektelig et vanskelig, i praksis er det et uoppnåelig mål i matematikk, men det er likevel et ideal vi skal ha hengende over oss.

Det å skrive matematikk har imidlertid sine særpreg der de universelle reglene må tilpasses. Og i det følgende skal vi gjennomgå en del punkter for hvordan dette gjøres.

Gjentagelser. En regel for god språkføring sier at vi ikke bruker samme ord to eller flere ganger i en setning dersom dette er et ord med en viss egenart. Eller at vi ikke bruker samme uttrykk flere ganger i samme paragraf. Istedet bruker vi heller en eufemisme, en omskrivning av uttrykket hvis vi igjen skal referere til det, eller vi bruker et passende pronomen som "det", "denne" eller lignende. Når det gjelder matematiske uttrykk er det ikke ønskelig å bruke omskrivinger, først og fremst fordi vi ønsker å være veldig presise, men også fordi slike uttrykk er mentalt krevende å lese. Men ofte trenger vi å referere til samme begrep, struktur eller relasjon flere ganger i en paragraf eller på en side, fordi det er sentralt i et argument. Løsningen vi har i matematikk på dette er at vi setter dette i display, f.eks. slik

$$\mathcal{N}^k\Bbbk[0,x] \tag{1}$$

eller slik

$$H^p\mathcal{N}^k(S/I)_{\mathbf{r}-\epsilon_i} \xrightarrow{\cdot x_i} H^p\mathcal{N}^k(S/I)_{\mathbf{r}} \tag{2}$$

og gir det et nummer. Når vi så må referere til relasjonen eller strukturen gjentatte ganger senere, referer vi simpelthen til nummeret. Hvis uttrykket vi refererer til er umiddelbart i nærheten, kan man også bruke utvetydige henvisninger som “vi ser av det siste uttrykket” eller “av høyresiden i formelen over ser vi”.

Notasjon. En annen regel for god språkføring er at man ikke strør om seg med unødige fremmedord eller tekniske uttrykk. Godt språk vil si å føre et variert språk, men også å ikke gjøre språket mer vanskelig enn det som trengs for å formidle det man ønsker. Dette har sin analogi i matematikk bl.a. ved å vise tilbakeholdenhet i å innføre matematisk notasjon. Man bør ikke innføre mer enn det man trenger for å formidle det man skriver på en grei måte. Skriver man om spesialiserte temaer eller man skriver god litteratur kan det være nødvendig med bruk av tekniske termer eller raffinert ordbruk for å formidle ting presist eller gi det den riktige nyansen. Men igjen, det bør ikke være mer enn påkrevet.

Særlig i matematikk skal man ha klart for seg at jo mer notasjon man innfører jo vanskeligere er det å gå inn et hvilket som helst sted i artikkelen eller boken, og få med seg hva som står der. Og etterhvert som man blir mer erfaren blir det sjeldnere og sjeldnere at man leser ting fra begynnelse til slutt. Og da er det irriterende å måtte bla i artikkelen for å finne ut hvor det og det er definert.

Her kommer noen grunner som er tilstrekkelig gode for å bruke matematisk notasjon.

- Notasjon som gjør det oversiktlig å følge med på standard algebraiske manipulasjoner av ligninger og formler. For eksempel

$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &= 0 \\ (x+1)^2-4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 4 \\ x+1 &= \pm 2 \\ x &= -1\pm 2 \\ x &= 1,-3. \end{aligned}$$

  Notasjonene man her har innført er ”$+,-,=$ ”, x for den ukjente, potenser ved å ha tall som superscript, vedsidenavposisjonering for å angi multiplikasjon og parenteser for å angi rangordning for operasjonene. Denne notasjonen har ikke alltid vært der. Den ble innført på 1500- og 1600-tallet. Før det hadde man ikke symboler for disse tingene, og man skrev dem som vanlig tekst. Den ukjente "x" betegnet man f.eks. bare som "tingen" eller "den ukjente". Det at man har innført enkel og standardisert notasjon for rutinepregete operasjoner har mye av æren for at matematikk har blitt et gjennomgripende og smidig verktøy.

- Sammensatte og komplekse begreper som det er *nødvendig* å referere til *gjentatte* ganger kan sammenfattes i en bokstav, P, Γ, f, eller α, gjerne med indekser eller argumenter hvis de avhenger av disse. Hvis disse argumentene eller indeksene er faste gjennom store deler av det man skriver, bør man ikke drasse på dem. På den annen side varierer de noe vil det likevel være bedre å angi dem eksplisitt. Her må man bruke skjønn.
- Man kan bruke symboler og notasjon som er standard på feltet, som alle som er fortrolige med feltet bør kjenne til. Ofte bør disse likevel ledsages av forklaringer for folk som er ferske eller ikke så fortrolige med feltet. I det minste kan man, når notasjonen brukes første gang, ledsage den med diskrete verbale forklaringer, gjerne også senere. F.eks. første gang men bruker notasjonen "(a, b)" i artikkelen, kan man skrive "la x være et element i det åpne intervallet (a, b)".

Det er mulig der er flere gode grunner til å bruke matematisk notasjon, men hovedregelen er som sagt at man bør vise tilbakeholdenhet med å innføre dette. La oss nå se på noen eksempler.

- Volumet av boksen er lwh, der l er lengden, w er bredden og h er høyden.

Hvis man ikke stadig senere bruker l, w og h kan dette gjøres som følger.

Volumet av boksen er produket av lengden, bredden og høyden.

- $\forall x \exists y, x \geq 0 \Rightarrow y^2 = x$.

Dette er mye mer anstrengende å lese enn følgende.

Ethvert reellt tall som er større eller lik null, har en kvadratrot.

Forøvrig bør man ikke bruke kvantorene $\forall$ og $\exists$ når man skriver matematiske artikler.

- Let X be a compact metric subspace of the space Y. If f is a continuous, $\mathbb{R}$-valued function on that space then it assumes both a maximum and a minimum value.

Her er det overflødig å referere til rommet Y. Så dette kan skrives som følger.

> Let X be a compact metric space. If f is a continuous, real-valued function on X then f assumes both a maximum and a minimum value.

Faktisk er det unødvendig å innføre noen notasjon i det hele tatt.

> A continuous, real-valued function on a compact metric space assumes both a maximum value and a minimum value.

Følgende eksempel er hentet fra en doktorgradsavhandling.

> Hvis $A \in \mathrm{Mat}_R(a,b)$ og $v_i \in R^a$ er den i^{th} kolonnevektor i A, så lar vi $I_k(A) = I_k(v_1, \ldots, v_b)$ være idealet generert av $k \times k$ minorene til $A(k \leq a, b)$. Dette avhenger selvfølgelig bare av $\mathrm{im}A = \langle v_1, \ldots, v_b \rangle = \{\sum_{i=1}^{b} c_i v_i \,|\, c_1, \ldots, c_b \in k\}$.

Her blir man nesten svimeslått av all notasjonen. Slik burde dette vært skrevet.

> La A være en $a \times b$ matrise over ringen R. Vi lar da $I_k(A)$ være idealet generert av $k \times k$-minorene til A. Dette avhenger selvfølgelig bare av rekkerommet til A.

Symboler. For å betegne matematiske størrelser og strukturer så bruker vi stort sett symboler fra det greske og latinske alfabetet. Hvert symbol er i to versjoner, stor eller liten bokstav. Vi har også et vidt spekter av symboler for å uttrykke operajoner på eller relasjoner mellom disse strukturene, f.eks. $a+b$, a/b, $A \subseteq B$, $A \cong B$, $a \to b$. I tillegg har vi diverse teknikker for å gi varianter av bokstaver, f.eks. fra a kan man danne $\mathbf{a}$, a', a'', $\hat{a}$, $\tilde{a}$, $\overline{a}$.

Her er noen ting som er viktige ved valg av symboler.

- Man bør så langt det er mulig holde seg til konvensjonene innen det fagfeltet man arbeider, for hvilke symboler som betegner forskjellige størrelser eller relasjoner. Dette gir gjenkjennelses- og assosiasjonsverdi for leseren og letter lesingen. En av de eldste konvensjonene, som stammer fra Descartes, er at x, y og z betegner variable tallstørrelser, mens a, b og c betegner konstante størrelser. Funksjoner betegnes gjerne med f, g og h. Indekser gjerne med i, j og k. Man bruker stor bokstav A for matriser, mens vektorer betegnes med små, gjerne fete bokstaver $\mathbf{a}$.
- Notasjonen bør ha assosiasjonsverdi. Dette er noe man blir bedre til med erfaring. Men ofte er det ganske naturlige grep som gjøres.

  Eksempel. Hvis x, y og i, j er to forskjellige typer argumenter for en funksjon f vil ikke det å skrive $f(x, y, i, j)$ tydeliggjøre distinksjonene mellom disse to typene. Da er det bedre å skrive $f(x, y; i, j)$ eller $f_{ij}(x, y)$. Hvis a og b er tall som representerer en nedre og en øvre verdi kan denne assosiasjonsverdien frembringes ved å skrive $f_a^b(x, y)$.

- Notasjonen bør gi et estetisk inntrykk.
- Man bør søke å slanke notasjonen, f.eks. ved å innføre overordnet notasjon hvis ting blir for utflytende og fulle av indekser. Her må man imidlertid også ta hensyn til regelen om tilbakeholdenhet med å innføre matematisk notasjon.

  Hvis man bruker uttrykket $f_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(a_1,\ldots,a_n)$ eller lignende uttrykk *gjentatte* ganger, vil det gjerne være bedre å la $\mathbf{i}$ betenge r-tuppelet $(i_1,\ldots,i_r)$ og tilsvarende for $\mathbf{j}$, og la $\mathbf{a}$ betegne det analoge n-tuppelet. Man kan da skrive $f_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{a})$.

Løs opp. God språkføring er å unngå oppstyltede, innviklede eller fortettede språklige konstruksjoner, og også unngå for lange setninger. Man bør løse opp, få mer luft og bryte opp i flere setninger. En tilpassing man har til dette i matematikk er en regel som sier at man i teksten ikke bør ha formler eller uttrykk som er lengre enn en fjerdedel eller en tredjedel av en setning. Er uttrykket lengre bør det enten stå i display eller, om man ikke synes det er viktig nok til det, brytes opp. Og akkurat dette er det, forunderlig nok, mange som ikke vet hvordan skal gjøres, eller i det minste ikke har et tilstrekkelig bevisst forhold til, selv blant rimelig erfarne matematikere. Som oftest er dette ytterst enkelt. Stort sett kan dette gjøres ved å f.eks. å erstatte et likhetstegn "=" med ordene "er lik", eller et isomorfitegn "≅" med "er isomorf til", eller "⊆" med "er delmengde i", eller "∈" med "er element i".

- Next we shall describe the Betti space $B^p(N_l^k(S/I)) = H^p(F\otimes_S N_l^k(S/I))$ for F a projective $\mathbf{Z}^n$-graded resolution of $\Bbbk$ over S.

Dette kan skrives som :

> Next we shall describe the Betti space $B^p(N_l^k(S/I))$, which may be computed as the cohomology group $H^p(F\otimes_S N_l^k(S/I))$ for F a projective $\mathbf{Z}^n$-graded resolution of $\Bbbk$ over S.

- with $C^k(w)_u = N_{l_j}^k \Bbbk\{0, l_j - y\}$ for

Dette bør heller være :

> where $C^k(w)_y$ is equal to $N_{l_j}^k \Bbbk\{0, l_j - y\}_w$ for

- then $Z(J,x,y'+1) \subseteq Z(J,x,y+1)$

Dette bør være :

> then $Z(J,x,y'+1)$ is a subset of $Z(J,x,y+1)$

- we define $\gamma(r) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(r_j)$ by the formula

Dette er akseptabelt, men det følgende gir et mer flytende og tydeligere prosa

> we define $\gamma(r)$ to be $\sum_{j=1}^n \gamma_j(r_j)$ where the terms in this sum are defined to be

Generelt bør tegnene som er nevnt før eksemplene, " $=, \subseteq, \in, \cong$ " osv. erstattes med ord når de stå i teksten (dvs. ikke som display). Dette bringer teksten nærmere flytende prosa, med tilstrekkelig åpenhet og luft. Kun ved enkle relasjoner som "så $x = 3$" eller "der $A \subseteq \mathbf{N}^n$" vil det være greit nok å beholde de matematisk symbolene.

Følgende eksempel er hentet fra en lærebok i algebra:

"By assumption, there exists a polynomial $h \in P$ such that we have $g + I' = \phi(h + I) = h(f_1, \ldots, f_n) + I'$. Since $g - h(f_1, \ldots, f_n) \in I'Q \subseteq J$ and $h - h(f_1, \ldots, f_n) \in (x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n) \subseteq J$ by Propositions 3.6.1.b, the polynomials g,h and $h(f_1, \ldots, f_n)$ have the same normal form by Proposition 2.4.10.a. "

Slik burde dette vært skrevet:

" By assumption there exists a polynomial $h \in P$ such that $g + I' = \phi(h + I)$, which is equal to $h(f_1, \ldots, f_n) + I'$. So $g - h(f_1, \ldots, f_n)$ is contained in $I'Q$ which is in J. Also $h - h(f_1, \ldots, f_n)$ is in the ideal $(x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n)$ by Proposition 3.6.1.b, and this ideal again is in J. Therefore the polynomials g, h and $h(f_1, \ldots, f_n)$ have the same normal form by Proposition 2.4.10.a."

Et annet eksempel fra samme lærebok:

" For every element $m \in M \backslash \{0\}$ there are $f_1, \ldots, f_s \in P$ such that $m = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i$ and $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \max_\sigma\{\mathrm{LT}_\sigma(f_i g_i) | i \in \{1, \ldots, s\}, f_i g_i \neq 0\}$ i.e. such that $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sum_{i=1}^{s} f_i \epsilon_i)$."

Slik kunne dette ha vært skrevet:

"For every nonzero element $m \in M$ there are polynomials $f_1, \ldots, f_s$ in P such that $m = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i$ and the leading term of m is the maximum among the leading terms of the nonzero $f_i g_i$ where i ranges from $1, \ldots, s$. So the leading term $\mathrm{LT}_\sigma(m)$ equals the degree $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sum_{i=1}^{s} f_i \epsilon_i)$."

I tråd med regelen om å unngå oppstyltet språk bør man passe på følgende når man har uttrykk i display. Man bør ikke liste opp relasjon etter relasjon der hver overgang bygger på komplekse sammenhenger eller teori man har bygget opp. For eksempel

$$
\begin{aligned}
& T\mathrm{Hom}_{J^{\mathrm{op}}}(E, K(J \cap [x, x+y])^{\mathrm{op}}) \\
& \cong \; T\mathrm{Hom}_{(J\cap(x+\mathbb{N}^n))^{\mathrm{op}}}(E|_{(J\cap(x+\mathbb{N}^n))^{\mathrm{op}}}, K(J \cap [x, x+y])^{\mathrm{op}}) \\
& = \; T\mathrm{Hom}_P(E, KF) \simeq \widetilde{C}^{-*}(I) \\
& \simeq \; \widetilde{C}^{-*}(I^{\mathrm{op}}) \\
& = \; \widetilde{C}^{-*}(J \cap (x + (\mathbb{N}^n \setminus [0, y]))).
\end{aligned}
$$

Slik kompakte opplistinger vil man nok ikke finne ofte hos veletablerte, erfarne matematikere. Istedet bør disse løses opp og hver overgang ledsages av klar og lettfattelig prosa. Slike opplistede relasjoner bør bare brukes når det dreier seg om standard algebraiske manipulasjoner som i eksempelet under punkt 1. tidligere.

Vær beskrivende. Et annet virkemiddel for å få mer flytende prosa i artikkelen, er at man ikke har for mye "la ... være", "slik at ..." . "Da er ... " og så bare fylle inn med matematisk notasjon. Her bør den matematiske notasjonen være ledsaget av beskrivende substantiver eller adjektiver. F.eks.

- Da vil $H^p(\mathcal{N}^{\mathbf{k}}\Bbbk[\mathbf{0},\mathbf{r}]) = \mathbf{T}^{\rho}\Bbbk[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Da gir det mer flyt, luft og lettlesthet å skrive følgende.

> Da vil kohomologimodulen $H^p(\mathcal{N}^{\mathbf{k}}\Bbbk[\mathbf{0},\mathbf{r}])$ være lik den translaterte intervallmodulen $\mathbf{T}^{\rho}\Bbbk[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Hvis H er et indreproduktrom kan man definere følgende.

- For et underrom $V \subseteq H$ definere underrommet $V^{\perp} \subseteq H$ som
$$V^{\perp} = \{\mathbf{w} \in H \,|\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0,\, \forall \mathbf{w} \in H\}.$$

Følgende er mer lettlest.

> For et underrom $V \subseteq H$, la det ortogonale underrommet $V^{\perp} \subseteq H$ bestå av vektorene $\mathbf{w}$ i H slik at at indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ for hver $\mathbf{v}$ i V.

Eller rett og slett :

> For et underrom $V \subseteq H$, la det ortogonale underrommet $V^{\perp} \subseteq H$ bestå av de vektorene i H som er ortogonale til alle vektorene i V.

Vær instrumentell. Av og til trenger man å formulere relativt komplekse og sammensatte teoremer og sammenhenger. En feil er å smelle dette opp i en kjempeformel eller i en serie av tekniske formler som så avsluttes av en "overformel".

Når det gjelder formler, så er det viktig å skille mellom to typer. På den ene siden har man dem som er et estetisk mål i seg selv. De som gir en kompakt, klar, konsis, elegant formulering av en interessant og spennende sammenheng. På den annen side dem som bare er et steg på veien, som ikke er noe spennende eller interessante i seg selv. Slike sammenhenger bør man være tilbakeholdne med å smelle fram i formler. De er ofte tunge og/eller drepende kjedelige å lese. Og er det noe man bør unngå i god prosa, så er det å kjede leseren. Slike ting vil det ofte være bedre å gi en instrumentell og begrepsmessig forklaring på. Forklare prinsippene for hvordan man kommer fram til/beregner størrelsen. Man skal selvfølgelig ikke renonsere på presisjon og klarhet. Alle ingredienser og prosedyrer skal være krystallklare. Men man utvikler ikke nødvendigvis eksplisitte formler.

Disse retningslinjene er også i overensstemmelse med fundamentale pedagogiske prinsipper. Skal man forklare ting så utvikler man det instrumentelt, man forklarer at sånn og sånn finner man den størrelsen, det er naturlig fordi ...., og sånn og sånn finner man den størrelsen. Og da vil følgende fine sammenheng gjelde ... . Dette i motsetning til : "La α = ..., la β = ..., la γ = ..., etc. Da gjelder "kjempeformel"". Dette siste er dårlig pedagogikk enten det gjelder barnehage, grunnskole, videregående, begynnerstudenter, masterstudenter, doktorstudenter, eller vitenskapelig presentasjoner :

Eksempel. Given $r \in \mathbb{Z}^n$ with $0 \leq r \leq l$ we define $\gamma(r) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(r_j)$ by the formula

$$\gamma_j(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r + k_j \leq l_j \\ 1 & \text{if } k_j \leq l_j + 1 \leq k_j + r \\ 2 & \text{if } k_j = l_j + 2 \end{cases}$$

Further we define $u(r) = (u_1(r_1), \ldots, u_n(r_n))$ and $v(r) = (v_1(r_1), \ldots, v_n(r_n))$ by the formulas

$$u_j(r_j) = \begin{cases} r_j - k_j & \text{if } k_j \leq r_j \\ l_j - (k_j - 1) & \text{if } r_j + 1 \leq k_j \leq l_j + 1 \\ r_j & \text{if } k_j = l_j + 2 \end{cases}$$

and

$$v_j(r_j) = \begin{cases} l_j - r_j + 1 & \text{if } k_j \leq r_j \\ r_j + 1 & \text{if } r_j + 1 \leq k_j \leq l_j + 1 \\ l_j - r_j + 1 & \text{if } k_j = l_j + 2. \end{cases}$$

Dette er opplisting av formler som er kjedelige og ikke særlig opplysende å lese. Her bør man først og fremst gi instrumentelle forklaringer på hvordan man naturlig kommer fram til disse tingene. Gjør man det kan leseren selv utlede dette for seg selv om han eller hun skulle trenge det. Hvis akkurat disse konkrete uttrykkene blir en god del brukt senere kan det nok være akseptabelt å liste dem opp, men altså bare etter at man har gitt gode konseptuelle forklaringer på hvordan man kommer fram til dem. Det bør likevel understrekes at nesten alltid vil man kunne klare å tilrettelegge framstillingen slik at man slipper å liste opp slike kjedelige uttrykk som over.

Det å gjøre ting instrumentelt er også i samsvar med våre urinstinkter. De første ordene var sannsynligvis handlingsord som "løp", "kast". Det krever atskillig mer livserfaring og utvikling å verdsette ord som "fårikål" , "fransk løksuppe", eller "kylling tikka masala".

> "Suppose you want to teach the "cat" concept to a very young child. Do you explain that a cat is a relatively small primarily carnivorous mammal with retractile claws, a distinctive sonic output etc.? I'll bet not.
>
> You probably show the kid a lot of different cats, saying "kitty" each time, until it gets the idea. To put it

more generally, generalizations is best made by abstraction from experience."

-Ralph P.Boas, *Can We Make Mathematics Intelligible? (1981)*

Flere dårlige eksempler. Følgende er fra en velkjent klassisk bok i kombinatorikk:

Proposition 0.1. *La* $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ *være en matroide med rangfunksjon* r *og* $\mathcal{I}$ *og* $\mathcal{R}$ *familiene av uavhengige mengder og kretser. Da gjelder for* $A \subseteq S, p \in S$*:*

(i) $p \in \overline{A} \Leftrightarrow (p \in A \text{ eller } \exists I \subseteq A \text{ med } I \in \mathcal{I}, I \cup p \notin \mathcal{I})$
(ii) $p \in \overline{A} \Leftrightarrow (p \in A \text{ eller } \exists C \subseteq \mathcal{R} \text{ med } p \in C \subseteq A \cup p)$
(iii) $p \in \overline{A} \Leftrightarrow r(A \cup p) = r(A)$.

Heldigvis er ikke slikt vanlig idag. Dette må kanskje ses som en rest av 60-tallets eksesser og tiden med "moderne matematikk". Her er det for mye notasjon, for lite beskrivende tekst og altfor tett. Slik burde dette vært skrevet:

Proposition 0.2. *Gitt en matroide med rangfunksjon* r *på mengden* S*. For enhver delmengde* $A \subseteq S$ *og* $p \in S$ *så gjelder:*

(i) *p er i tillukningen $\overline{A}$ hvis og bare hvis p er i A eller der er en uavhengig mengde $I \subseteq A$ slik at å legge til p gjør $I \cup \{p\}$ avhengig.*
(ii) *p er i tillukningen $\overline{A}$ hvis og bare hvis p er i A eller p er inneholdt i en krets C som er inneholdt i $A \cup \{p\}$.*
(iii) *p er i tillukningen $\overline{A}$ hvis og bare hvis rangen ikke endres ved å legge p til A, dvs. $r(A \cup \{p\}) = r(A)$.*

Legg spesielt merke hvordan vi gjør formuleringen i (i) og (iii) instrumentelle. Vi gjør en handling "legger til p" og beskriver så hva som skjer.

Her er et annet eksempel fra samme bok:

Kretsaksiomer 1. *La* $\mathbf{M}(S)$ *være en matroide og* $\mathcal{R}$ *familien av kretser. Da:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{R}; C \neq C' \in \mathcal{R} \Rightarrow C \nsubseteq C', C' \nsubseteq C$,
(ii) $C \neq C' \in \mathcal{R}, p \in C \cap C' \Rightarrow \exists D \in \mathcal{R} \text{ with } D \subseteq (C \cup C') - p$,
(ii') $C \neq C' \in \mathcal{R}, p \in C \cap C', q \in C - C' \Rightarrow \exists D \in \mathcal{R} \text{ with } q \in D \subseteq (C \cup C') - p$.
(iii) *Der finnes* $n \in \mathbb{N}_0$ *slik at* $|A| \leq n$ *når* $A \nsupseteq C$ *for alle* $C \in \mathcal{R}$.

Hvis omvendt, $\mathcal{R} \subseteq 2^S$ *oppfyller (i),(ii),(iii), eller (i), (ii'), (iii) så er* $\mathcal{R}$ *familien av kretser til en entydig bestemt matroide.*

Slik burde dette vært skrevet:

Kretsaksiomer 2. *Gitt en matroide på mengden S. Da gjelder:*

(i) *Anta den tomme mengden ikke er en krets. Hvis en krets er inneholdt i en annen krets, så er kretsene like.*
(ii) *Hvis C og C' er forskjellige kretser med et felles element p så finnes der en krets D i $C \cup C'$ som ikke innholder p.*
(ii') *La C og C' være kretser med et felles element p og anta q er i C men ikke i C'. Da er der en krets D inneholdt i $C \cup C'$ som inneholder q men ikke p.*
(iii) *Der er et tall $n \in \mathbb{N}_0$ slik at for enhver mengde A som ikke innholder noen kretser, så har A kardinalitet $\leq n$.*

Hvis omvendt en familie av delmengder av S, kalt kretser, oppfyller (i), (ii), (iii), eller (i), (ii'), (iii), så er der en entydig matroide der kretsene er gitt ved denne familien.

Gi ideene, motiver. Matematikk foregår alltid på to plan. For det første må vi gripe matematikken og de matematiske modellene idemessig. For det andre må vi kunne formalisere idéene skriftlig så de kan formidles på en presis måte. Det å gripe matematikken idemessig er selvfølgelig nødvendig for alle som vil bruke matematikken kreativt. Og matematikkens idéverden er det som gjør den spennende og fascinerende. Derfor bør vi alltid når vi skriver matematikk søke å motivere, søke å male ut det idémessige for leseren og relatere det til det han eller hun kjenner fra før. For å gjøre dette på en treffende måte er det selvfølgelig viktig å vite hvem man skriver eller formidler det til. Å skrive en vitenskapelig artikkel om toriske varieteter for profesjonelle matematikere krever andre motiverende grep enn å skrive en populær artikkel om primtall eller kvantemekanikk for et bredere publikum.

Motiveringen og formidlingen av det idémessige når vi skriver matematikk vil også foregå på flere plan. For det første på et overordnet plan der vi formidler idéen med selve artikkelen. Dette foregår først og fremst i introduksjonen. Men så bør vi hele tiden underveis også i detaljene søke å motivere hvorfor vi utvikler artikkelen som vi gjør, hvorfor vi viser dette lemmaet, denne proposisjonen, eller dette teoremet. Hva sier dette idémessige? Slike ting skjer som små ingresser til hver seksjon, eller i noen linjer før man gir det formelle matematiske utsagnet eller den formelle definisjonen.

Eksempel. The First Fundamental Theorem says that the process of differentiation reverses that of integration. This statement is remarkable because the two processes appear to be so different: differentiation gives us the slope of the curve; integration, the area under the curve. Here is a precise statement of the theorem.

Theorem (First Fundamental Theorem of Calculus). Let f be a function defined and continuous on the closed interval $[a, b]$ and let c be in

$[a, b]$. Then for each x in the open interval (a, b), we have

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x).$$

Her følger noen føringer som gjelder for seksjoner eller avsnitt i matematiske artikler.

Introduksjon. I introduksjonen forklarer man hva man viser i artikkelen, og man relaterer det til hva andre har gjort og setter det inn i en sammenheng. Samtidig bør man også selge resultatet man har, formidle hvorfor dette er viktig, spennende og interessant.

Introduksjonene bør ikke inneholde tekniske utlegninger. Den skal være så presis man kan uten å bli teknisk. Hvis mulig bør man presist formulere hovedresultatene i introduksjonen, men ofte involverer disse tekniske begreper som det ikke lar seg gjøre å formidle i introduksjonen. Isåfall må man droppe de helt presise resultatene og heller gi en så god forklaring som man kan.

Til sist i introduksjonen er det også vanlig at man gir en oversikt over seksjonene i artikkelen og kort sier hva man gjør der.

Bemerkninger/remarks. Det skal generelt ikke være tekniske utlegninger i disse. De skal være mer for å gi kjøtt og bakteppe til det som er gjort, relatere det til hva andre har gjort, angi finurligheter eller finesser man bør være oppmerksom på, eller belyse en relatert ting.

Det som står i bemerkninger skal ikke være nødvendig for videre lesning. Bevis eller argumenter bør ikke bygge på eller bruke noe som er sagt der. Ting som skal brukes senere i argumenter bør stå eksplisitt som lemmaer, proposisjoner, korollarer, teoremer eller lignende. Og omvendt, er det noe som ikke er nødvendig for videre lesning og som ikke er del av resultatene som utvikles, skal det stå som bemerkning.

> "Vigorous writing is concise. A sentence should contain no unnecessary words, a paragraph no unnecessary sentences, for the same reason that a drawing should have no unnecessary lines and a machine no unnecessary parts. This requires not that the writer make all sentences short, or avoid all detail and treat subjects only in outline, but that every word tell."
>
> -Strunk and White, *The elements of style*

Litt om referansene.

Strunk og White [9] er en klassiker og omhandler skriving generelt. "A book that every writer should read at least once a year". Den er slank og konsis og selger fremdeles som bare det i bokhandlene i USA. Det er først og fremst en bok om ordvalg og formuleringskunst. Kleiman [5] er en kort og grei stensil som gir en innføring i skriving av matematiske artikler og ingrediensene i disse. Higham [1] og Krantz [6] går inn på alle de tekniske sider ved skriveprosessen, den første mer gjennomført, den andre mer uformell i stil. Steenrod [8] skriver også om de mentale prosesser og er fra tiden før datamaskinen. Knuth et. al. [7] er bygget på et skrivekurs fra Stanford og inneholder blant annet synspunkter og bidrag fra mange forelesere som kom for å snakke om temaet. Anders Johansen [2], professor i medievitenskap ved Universitetet i Bergen, har nylig (2009) gitt ut en svært lesverdig (og slank) bok om det å skrive sakprosa. Olga Dyste, professor ved UiB, et.al., [4], anbefales varmt til alle som skal skrive bacheloroppgaver, masteroppgaver eller doktoroppgaver. Den omhandler hele skriveprosessen og de utfordringer den gir, fra de første ideene til det ferdige utkastet. En matematikkbok som på en utmerket måte oppfyller de stilistiske retningslinjene vi angir her er [3]. Dette til tross for at temaet er beregningsalgebra, som ofte inneholder mye kronglete polynomuttrykk.

References

[1] N.Higham, *Handbook of writing for the mathematical sciences*, SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.

[2] A.Johansen, *Skriv! Håndverk i sakprosa*, Spartacus forlag, 2009.

[3] D.A.Cox, J.B.Little, D.O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer Verlag, 2007.

[4] O.Dysthe, T.Løkensgård, F.Herzberg, *Skrive for å lære*, 2. utgave, 2010, Abstrakt forlag.

[5] S.Kleiman, *Writing a Math Phase Two Paper,* www.math.uconn.edu/troby/Math200S08/mathwrite.pdf.

[6] S.Krantz, *A Primer of Mathematical Writing*, AMS, Providence, Rhode Island, 1997.

[7] D.E.Knuth, T.Larrabee, P.M.Roberts, *Mathematical writing*, Mathematical Notes No. 14, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1989.

[8] N.Steenrod, et.al., *How to write mathematics*, AMS, Providence, Rhode Island, 1973.

[9] W.Strunk jr., E.B.White, *The elements of style*, Longman Publishers, Fourth Edition, 2000.